

TD₅ – Matrices

Exercice 1 ★

Pour chacune des matrices suivantes, donner son rang, puis donner une base du noyau et une base de l'image de l'endomorphisme canoniquement associé. Quand l'endomorphisme est inversible on déterminera également son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 ★

- Déterminer selon les valeurs des réels a et b le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$.
- Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à M . Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 3 ★★

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer $M^2 - (2+x)M + (1+x-2x^2)I_3$.
- En déduire pour quelles valeurs de x la matrice M est inversible.

Exercice 4 ★

Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 Matrice d'une projection ★★

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((-1, 1, 1))$.

- Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de F et en déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
- On note p la projection sur F parallèlement à G .
 - Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.
 - En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
 - Soit q la projection sur G parallèlement à F . Montrer que $q = \text{id}_E - p$ et en déduire la matrice de q dans la base canonique.

Exercice 6 ★★

On pose

$$A = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A .

1. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer l'existence d'une base dans laquelle la matrice de f est diagonale
3. Déterminer une telle base et la matrice de f dans ladite base.

Exercice 7 Formule de changement de base ★

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} -1 & 13 & -16 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, 5e_1 + 3e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. En déduire la valeur de A^4 .

Exercice 8 ★★

Montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 9 ★★

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$, qui à un polynôme P associe $\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique, notée $\mathcal{B}_{can}$.
3. On pose $P_1 = (X + 1)^2$, $P_2 = X^2 - 1$ et $P_3 = (X - 1)^2$. Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, puis donner la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.
4. En déduire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de φ^n dans la base $\mathcal{B}$. En déduire la matrice φ^n dans la base canonique.

Exercice 10 ★★

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ telles que $AB = 0$. Montrer que l'une au moins de ces deux matrices est de rang inférieur ou égal à 1.

Exercice 11 ★★★★★

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est A .

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D .
2. Déterminer une matrice P de $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1} .
3. Calculer $A^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12 ★★★

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, i.e. telle qu'il existe $p \geq 1$ tel que $N^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

1. Montrer que la matrice $A = I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse
2. Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.

Exercice 13 ★★★

Dans chaque cas, déterminer si les matrices A et B sont semblables :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 ★★

Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(M) = \text{Tr}(M)I_n + M$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Déterminer le noyau et le rang de φ . Est-il bijectif?
3. Vérifier que $\varphi^2 - (n+2)\varphi + (n+1)\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = 0$, en déduire l'expression de φ^{-1} .

Exercice 15 ★★

Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et montrer que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle, alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}(A)$.

Exercice 16 ★★★

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\text{Rang}(M) = \text{Tr}(M) = 1$.

1. Montrer que M est semblable à une matrice dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M . Montrer que f est un projecteur.

Exercice 17 ★★★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M + M^\top = \text{Tr}(M)A$. On pourra distinguer les cas $\text{Tr}(A) = 2$ et $\text{Tr}(A) \neq 2$.

Exercice 18 Matrices à diagonale strictement dominante ★★★★★

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$AX = 0$, et soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$.

Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A est inversible.

Exercice 19 ★★★★★

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$.
2. En déduire que $A = 0_n$ si et seulement si $\text{Tr}(A^\top A) = 0$.
3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit une application φ_A sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi : M \mapsto \text{Tr}(A^\top M)$.
 - (a) Montrer que φ_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (b) Prouver que $A \mapsto \varphi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.
 - (c) Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe un unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi = \varphi_A$.

Exercices issus d'oraux

Exercice 20 ★★★★★

(Oral 2008)

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B = AB$

1. Montrer que $B - I_n$ est inversible
2. Montrer que A et B commutent.

Exercice 21 ★★★★★

(Oral 2015)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$X \mapsto \text{Tr}(X)A + X$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Montrer que φ est bijectif lorsque $\text{Tr}(A) \neq -1$
3. Donner le rang de φ lorsque $\text{Tr}(A) = -1$
4. Retrouver directement le résultat de la question 2. lorsque $n = 2$.

Exercice 22 ★★★★★

(Oral 2011)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $f : x \mapsto x^2 e^{2x}$, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{2x}$. Déterminer P_n à l'aide du calcul de A^n .

Exercice 23 ★★★★★

(Oral 2018, 2019)

On pose $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $E = \{aI_3 + bJ, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Calculer J^2 et J^n , J est-elle inversible ?
2. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. En donner une base et la dimension. E est-il stable par produit ?
3. Trouver les matrices de E qui admettent un inverse dans E et préciser celui-ci.
4. Résoudre $X^2 = X$ dans E .

Exercice 24 ★★★★★

(Oral 2018)

Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

1. Donner le rang de C
2. Trouver les matrices B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $BC = 0_3$

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

$$— A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{10}{7}L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi a est de rang 2.

Notons φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A . Alors $\text{Im}(\varphi_A) = \text{Vect}((1, -3, -3), (2, 1, 4), (1, 4, 7))$.

On sait que $\dim(\text{Im}(\varphi_A)) = \text{Rang}(\varphi_A) = 2$. Ainsi, les bases de $\text{Im}(\varphi_A)$ sont de cardinal 2.

On sait que de toute famille génératrice on peut extraire une base, on va alors extraire une base de $\text{Im}(\varphi_A)$ à partir de la famille $(1, -3, -3), (2, 1, 4), (1, 4, 7)$.

On a $\text{Rang}((1, -3, -3), (2, 1, 4)) = 2$. Ainsi

$$\text{Vect}((1, -3, -3), (2, 1, 4)) \subset \text{Vect}((1, -3, -3), (2, 1, 4), (1, 4, 7))$$

et

$$\dim(\text{Vect}((1, -3, -3), (2, 1, 4))) = \dim(\text{Vect}((1, -3, -3), (2, 1, 4), (1, 4, 7)))$$

D'où $\text{Im}(\varphi_A) = \text{Vect}((1, -3, -3), (2, 1, 4))$ et $((1, -3, -3), (2, 1, 4))$ est une base de $\text{Im}(\varphi_A)$.

On a

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi_A) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \right\} \\ &= \{(z, -z, z), z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((1, -1, 1)) \end{aligned}$$

Ainsi $(1, -1, 1)$ est une base de $\text{Ker}(\varphi_A)$. Comme $\text{Ker}(\varphi_A) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ alors φ_A n'est pas inversible.

$$— B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 10L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & -20 & 42 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -20 & 42 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 20L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi B est de rang 3. Notons φ_B l'application linéaire canoniquement associée à B . Alors $\text{Im}(\varphi_B) = \text{Vect}((4, 1, 10), (2, 2, 0), (0, -3, 12)) = \mathbb{R}^3$ et donc $((4, 1, 10), (2, 2, 0), (0, -3, 12))$ est une famille génératrice de cardinal 3 de $\text{Im}(\varphi_B)$ qui est de dimension 3, $((4, 1, 10), (2, 2, 0), (0, -3, 12))$ est ainsi une base de $\text{Im}(\varphi_B) = \mathbb{R}^3$.

De plus $\text{Ker}(\varphi_B) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

φ_B est inversible. Son inverse est l'endomorphisme canoniquement associé à B^{-1} que l'on va déterminer.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 10L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -20 & 42 & 0 & -10 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -20 & 42 & 0 & -10 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 20L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{10}{3} & \frac{10}{3} & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{Et donc } B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & 4 & 1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

φ_B^{-1} est alors l'endomorphisme canoniquement associé à B^{-1} , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \varphi_B^{-1} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(2x - 2y - \frac{z}{2}, -\frac{7x}{2} + 4y + z, -\frac{5x}{3} + \frac{5y}{3} + \frac{z}{2} \right) \end{aligned}$$

$$- C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi C est de rang 1. On note φ_C l'application linéaire canoniquement associée à C . Alors $\text{Im}(\varphi_C) = \text{Vect}((1, -3, -2), (1, -3, -2), (-1, 3, 2)) = \text{Vect}((1, -3, -2))$. $(1, -3, -2)$ est donc une base de $\text{Im}(\varphi_C)$.

On a de plus

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi_C) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0 \} \\ &= \{ (z - y, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 1), (-1, 1, 0)) \end{aligned}$$

La famille $(1, 0, 1), (-1, 1, 0)$ est clairement libre et est donc une base de $\text{Ker}(\varphi_C)$.

Comme $\text{Ker}(\varphi_C) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, φ_C n'est pas inversible.

$$- D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi D est de rang 3. Notons φ_D l'application linéaire canoniquement associée à D . Alors $\text{Im}(\varphi_D) = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)) = \mathbb{R}^3$ et donc $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est une famille génératrice de cardinal 3 de $\text{Im}(\varphi_D)$ qui est de dimension 3, $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est ainsi une base de $\text{Im}(\varphi_D) = \mathbb{R}^3$.

De plus $\text{Ker}(\varphi_D) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

φ_D est inversible. Son inverse est l'endomorphisme canoniquement associé à D^{-1} que l'on va déterminer.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$$

$$L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{Et donc } D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

φ_D^{-1} est alors l'endomorphisme canoniquement associé à D^{-1} , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \varphi_D^{-1} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x+y-z}{2}, \frac{x-y+z}{2}, \frac{-x+y+z}{2} \right) \end{aligned}$$

$$- E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ -2 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 4 & -21 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E est donc de rang 3. On note $\varphi_E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire canoniquement associée à E . On a alors $\text{Im}(\varphi_E) = \text{Vect}((-3, -2, 1, -1), (4, 4, 0, 4), (0, 7, -7, 0))$. On sait de plus que $\text{Im}(\varphi_E)$ est de dimension 3. Ainsi $((-3, -2, 1, -1), (4, 4, 0, 4), (0, 7, -7, 0))$ est une base de $\text{Im}(\varphi_E)$. D'après le théorème du rang on a

$$\dim(\text{Ker}(\varphi_E) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{Rang}(\varphi_E)) = 3 - 3 = 0$$

D'où $\text{Ker}(\varphi_E) = \{0\}$.

φ_E n'est pas inversible car $\dim(\mathbb{R}^4) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$— F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

F est donc de rang 4. Notons φ_F l'application linéaire canoniquement associée à F . Alors

$\text{Im}(\varphi_F) = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0)) = \mathbb{R}^4$ et donc $((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0))$ est une famille génératrice de cardinal 4 de $\text{Im}(\varphi_F)$ qui est de dimension 4, $((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0))$ est ainsi une base de $\text{Im}(\varphi_F) = \mathbb{R}^4$.

De plus $\text{Ker}(\varphi_F) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

φ_F est inversible. Son inverse est l'endomorphisme canoniquement associé à F^{-1} que l'on va déterminer.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\text{Et donc } F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

φ_F^{-1} est alors l'endomorphisme canoniquement associé à F^{-1} , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \varphi_F^{-1} : \quad \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) &\mapsto (y, -y + z, -y + t, x + y - z - t) \end{aligned}$$

$$— G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & -\frac{2}{2} \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

G est donc de rang 2. Soit $\varphi_G : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à G .

Alors $\text{Im}(\varphi_G) = \text{Vect}((2, -1, 3), (-1, 2, 0), (1, 3, 5), (5, -4, 6))$. On sait que $\dim(\text{Im}(\varphi_G)) = \text{Rang}(\varphi_G) = 2$. Ainsi, les bases de $\text{Im}(\varphi_G)$ sont de cardinal 2. On sait que de toute famille

génératrice on peut extraire une base, on va alors extraire une base de $\text{Im}(\varphi_G)$ à partir de la famille $((2, -1, 3), (-1, 2, 0), (1, 3, 5), (5, -4, 6))$.

On a $\text{Rang}((2, -1, 3), (-1, 2, 0)) = 2$. Ainsi

$$\text{Vect}((2, -1, 3), (-1, 2, 0)) \subset \text{Vect}((2, -1, 3), (-1, 2, 0), (1, 3, 5), (5, -4, 6))$$

et

$$\dim(\text{Vect}((2, -1, 3), (-1, 2, 0))) = \dim(\text{Vect}((2, -1, 3), (-1, 2, 0), (1, 3, 5), (5, -4, 6)))$$

D'où $\text{Im}(\varphi_G) = \text{Vect}((2, -1, 3), (-1, 2, 0))$ et $((2, -1, 3), (-1, 2, 0))$ est une base de $\text{Im}(\varphi_G)$.

On a

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi_G) &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x = \frac{y}{2} - \frac{z}{2} - \frac{5t}{2} \\ 3y = -\frac{7z}{2} + \frac{3t}{2} \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \left(-\frac{5z}{3} - 2t, -\frac{7z}{3} + t, z, t \right), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\left(-\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 1, 0 \right), (-2, 1, 0, 1) \right) \end{aligned}$$

La famille $\left(\left(-\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 1, 0 \right), (-2, 1, 0, 1) \right)$ est libre et, par conséquent, est une base de $\text{Ker}(\varphi_G)$. Comme $\dim(\mathbb{R}^4) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$ alors φ_G n'est pas inversible.

Corrigé de l'exercice 2

1. On a

$$\begin{aligned} \text{Rang}(M) &= \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} b & a & b \\ a & 0 & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \right) & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &= \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \right) & C_1 \leftrightarrow C_2 \end{aligned}$$

— Si $a \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} \text{Rang}(M) &= \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a - \frac{b^2}{a} \end{pmatrix} \right) & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{b}{a} L_2 \\ &= \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & \frac{a^2 - b^2}{a} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

- Ainsi $\text{Rang}(A) = 2$ si $a^2 = b^2$ i.e. si $a = b$ ou $a = -b$ et $\text{Rang}(A) = 3$ sinon
 — Si $a = 0$ alors

$$\begin{aligned}\text{Rang}(M) &= \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \right) \quad L_2 \leftrightarrow L_3\end{aligned}$$

Ainsi $\text{Rang}(A) = 2$ si $b \neq 0$ $\text{Rang}(A) = 0$ sinon.

2. — Si $a = b = 0$ alors $\text{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$
 — Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((0, 1, 0))$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 1, 0))$
 — Si $a \neq 0$ et $b \notin \{a, -a\}$ alors $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$
 — Si $a \neq 0$ et $b = a$ alors $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 0, -1))$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 1, 1), (0, 1, 0))$
 — Si $a \neq 0$ et $b = -a$ alors $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 2, 1))$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, -1, -1), (0, 1, 0))$

Corrigé de l'exercice 3

1. Notons $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $J^2 = 3J$.

De plus $M = xJ + (1-x)I_3$, ainsi, comme I_3 et J commutent on a

$$\begin{aligned}M^2 &= x^2 J^2 + 2x(1-x)J + (1-x)^2 I_3 \\ &= (3x+2-2x)xJ + (1-x)^2 I_3 \\ &= (x+2)(M + (x-1)I_3) + (1-x)^2 I_3 \\ &= (x+2)M + (x-1)(x+2-1+x)I_3 \\ &= (x+2)M + (2x^2-x-1)I_3\end{aligned}$$

D'où $M^2 - (2+x)M + (1+x-2x^2)I_3$

2. D'après la question précédente on a $M(M - (2+x)I_3) = (2x^2 - x - 1)I_3$.

- Si $2x^2 - x - 1 \neq 0$ alors $M \left(\frac{M - (2+x)I_3}{2x^2 - x - 1} \right) = I_3$, ainsi M est inversible et $M^{-1} = \frac{M - (2+x)I_3}{2x^2 - x - 1}$.
 — Si $2x^2 - x - 1 = 0$ alors $M^2 = (2+x)M$. Supposons par l'absurde que M soit inversible, alors, en multipliant l'égalité par M^{-1} on a $M = (2+x)I_3$, ceci n'est pas le cas, ainsi M n'est pas inversible.

Finalement M est inversible si et seulement si $2x^2 - x - 1 \neq 0$ i.e. si et seulement si $x \notin \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$.

Corrigé de l'exercice 4

Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $A = I_3 + N$.

De plus $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_3$

Puisque I_3 et N commutent on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A^n &= (I_3 + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_3^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} N^k \\ &= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 5

1. Notons que H est de dimension 2 car c'est le noyau de la forme linéaire $(x, y, z) \mapsto 2x + 2y - z$, et donc c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F &\Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, 2x + 2y) \Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 2) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, 2)). \end{aligned}$$

Et donc la famille $(1, 0, 2), (0, 1, 2)$ est génératrice de F . Étant formée de deux vecteurs non colinéaires elle est libre et donc c'est une base de F .

La famille $(1, 0, 2), (0, 1, 2), (-1, 1, 1)$ est donc la concaténation d'une base de F et d'une base de G .

Sa matrice dans la base canonique est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Un calcul de pivot nous prouve que cette matrice est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

En particulier, $\mathcal{B} = (1, 0, 2), (0, 1, 2), (-1, 1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donc la somme $F + G$ est directe. Puisque $\dim(F \oplus G) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on a alors $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. Et alors, $\mathcal{B}$, qui est la concaténation d'une base de F et d'une base de G , est bien une base adaptée à la somme directe.

2. (a) Puisque $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
De plus $\text{Rang}(p) = \dim \text{Im}(p) = \dim F = 2$ et donc la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Par la formule de changement de base, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(p) = P_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{can}}.$$

Or, par définition, la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est précisément la matrice P de la question 1, donc

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Si on n'a pas vu précédemment que F était un hyperplan, on le retrouve ici : $\dim F = 2$.

Somme directe

Rappelons que F et G sont supplémentaires si et seulement si la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de $\mathbb{R}^3$.
Ce n'est bien évidemment pas la seule méthode de prouver que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Vérification

Un bon moyen de vérifier son résultat est de s'assurer que cette matrice vérifie $A^2 = A$, signe que c'est bien une matrice de projecteur!

- (c) Par définition si p est la projection sur F parallèlement à G alors $q = \text{Id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F .

Projections associées

Si p est la projection sur F parallèlement à G et q est la projection sur G parallèlement à F alors $p + q = \text{Id}_E$, on dit que p et q sont deux projections associées.

$$A \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 6

1. f est un projecteur si et seulement si $A^2 = A$. Or

$$A^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Ainsi f est bien un projecteur.

2. Le cours nous assure que si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^4 = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ alors la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale.
3. Il nous faut donc trouver une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^4 = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$, i.e. la concatenation d'une base de $\text{Im}(f)$ et d'une base de $\text{Ker}(f)$.

$$\text{Or } \text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\left(-\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0 \right), \left(-\frac{1}{3}, -1, -\frac{1}{3}, 0 \right), \left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 0 \right), (0, 0, 0, 0) \right) = \text{Vect}((2, 0, -1, 0), (1, 3, 1, 0)).$$

Les vecteurs $(2, 0, -1, 0)$ et $(1, 3, 1, 0)$ sont non-colinéaires, ils forment donc une famille libre.

Ainsi $((2, 0, -1, 0), (1, 3, 1, 0))$ est une base de $\text{Im}(f)$.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in \text{Ker}(f) & \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + 2z = 0 \\ -3y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

Les vecteurs $(1, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$ sont non-colinéaires, ils forment donc une famille libre.

Ainsi $((1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

Notons $\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$. Comme $\mathbb{R}^4 = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^4 = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

On a de plus

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 7

1. Écrivons la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Il s'agit de $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie aisément que cette matrice est inversible, donc $\mathcal{B}'$ est une base et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

De plus, $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. D'après la formule de changement de base, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $M^4 = I_3$.

On en déduit que $A^4 = P M^4 P^{-1} = P P^{-1} = I_3$.

△Attention

Attention au sens : on a écrit les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, on a donc la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Corrigé de l'exercice 8

Raisonnons par l'absurde et supposons au contraire que deux telles matrices existent. Alors, par linéarité de la trace, on aurait

$$\text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = \text{Tr}(I_n) = n.$$

Or, nous savons que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, et donc l'égalité précédente s'écrit alors $0 = n$, d'où une contradiction : il n'est pas possible de trouver un couple de matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ vérifiant $AB - BA = I_n$.

Corrigé de l'exercice 9

1. Commençons par prouver que φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)(2aX + b) - 2X(aX^2 + bX + c) = -bX^2 - 2(a + c)X - b \in \mathbb{R}_2[X].$$

De plus, pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= (X^2 - 1)(\lambda P + Q)' - 2X(\lambda P + Q) \\ &= (X^2 - 1)\lambda P' + (X^2 - 1)Q' - 2\lambda XP - 2XQ \\ &= \lambda((X^2 - 1)P' - 2XP) + (X^2 - 1)Q' - 2XQ = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire : c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. On a $\varphi(1) = -2X$, $\varphi(X) = X^2 - 1 - 2X^2 = -X^2 - 1$ et $\varphi(X^2) = 2X(X^2 - 1) - 2X^3 = -2X$.
On en déduit que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}.$$

Remarque

Au premier abord, on peut seulement affirmer que les deux polynômes $(X^2 - 1)P'$ et $2XP'$ sont de degré au plus 3. Il s'agit donc de prouver que leurs termes de degré 3 sont les mêmes, afin que $\varphi(P)$ soit dans $\mathbb{R}_2[X]$.

3. On a $P_1 = X^2 + 2X + 1$, $P_2 = X^2 - 1$ et $P_3 = X^2 - 2X + 1$.
Et donc la matrice de (P_1, P_2, P_3) dans la base $\mathcal{B}_{can}$ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}.$$

Un calcul de pivot prouve que cette matrice est inversible, et donc que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\text{Alors } P_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{can}} = P_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. D'après la formule de changement de base, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{can}} \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\varphi) P_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Le calcul de $\varphi(P_1)$ nous aurait permis facilement de constater que $\varphi(P_1) = -2P_1$.

5. Puisque pour élever une matrice diagonale à la puissance n , il suffit d'élever chacun de ses coefficients à la puissance n , on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Toujours d'après la formule de changement de base, on a alors

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\varphi^n) &= P_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{can}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 2^n \\ 2(-2)^n & 0 & -2^{n+1} \\ (-2)^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-2)^n + 2^n & (-2)^n - 2^n & (-2)^n + 2^n \\ -(-2)^{n+1} - 2^{n+1} & -(-2)^{n+1} + 2^{n+1} & -(-2)^{n+1} - 2^{n+1} \\ (-2)^n + 2^n & (-2)^n - 2^n & (-2)^n + 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notons qu'on peut donner un résultat un peu moins dur à manipuler en distinguant suivant la parité de n :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\varphi^n) = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est pair, } \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\varphi^n) = \begin{pmatrix} 0 & -2^{n-1} & 0 \\ -2^n & 0 & -2^n \\ 0 & -2^{n-1} & 0 \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Corrigé de l'exercice 10

Notons f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont A et B .

Alors $AB = 0 \Leftrightarrow f \circ g = 0$. Ainsi, nous avons $\text{Im}(g) \subset \text{Ker } f$.

Supposons par l'absurde que $\text{rg}(f) \geq 2$ et $\text{rg}(g) \geq 2$.

Alors $\dim \text{Ker } f = 3 - \text{rg}(f) \leq 1$.

Mais $\dim \text{Im } g \geq 2$, et donc il n'est pas possible d'avoir $\text{Im } g \subset \text{Ker } f$, d'où une contradiction.

On en déduit que $\text{rg}(A) = \text{rg}(f) \leq 1$ ou $\text{rg}(B) = \text{rg}(g) \leq 1$.

Corrigé de l'exercice 11

1. Notons que si une telle base existe, alors on doit avoir

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}.$$

Nous allons donc prouver qu'il existe une base (e_1, e_2, e_3) vérifiant $f(e_1) = 0, f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = e_3$.

Soit donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $f(x, y, z) = 0$ si et seulement si

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ -2x - 4y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ 2x - 2z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = z \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\text{Vect}((1, -1, 1))$.

Prenons donc $e_1 = (1, -1, 1)$.

De même, on a $f(x, y, z) = (x, y, z)$ si et seulement si

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2z = x \\ 2x + y + 3z = y \\ -2x - 4y - 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases}$$

On peut donc prendre $e_2 = (-2, 1, 0)$.

De même, on a $f(x, y, z) = 2(x, y, z)$ si et seulement si

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2z = 2x \\ 2x + y + 3z = 2y \\ -2x - 4y - 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

On peut donc prendre $e_3 = (0, 1, -1)$.

Vérifions à présent que la famille (e_1, e_2, e_3) ainsi choisie est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de cette famille dans la base canonique est

$$P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un pivot montre que cette matrice est inversible, et donc que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Et alors, nécessairement,

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} = D.$$

2. Puisque (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, par définition d'une matrice de passage, on a

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = P$$

D'où, par la formule de changement de base,

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} = P D P^{-1}.$$

Méthode

On peut prendre pour e_1 n'importe quelle solution non nulle de $f(x, y, z) = (x, y, z)$. En revanche, prendre $e_1 = 0$ risquerait de poser problème plus tard : une famille contenant le vecteur nul n'est jamais libre, et donc ne peut constituer une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarque

Nous disposerons plus tard d'un argument nous dispensant de prouver la liberté de cette famille car elle est automatique (pour les 5/2 : il s'agit d'une famille de trois vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes**).

De plus, on a alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^n &= (PDP^{-1})^n \\ &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 0 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2^n & 1 + 2^{n+1} & 2^n + 1 \\ -2^n & -2^{n+1} & -2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si on choisit une autre base vérifiant les conditions de la question 1, on obtient une autre matrice P (et donc une autre matrice P^{-1}) qui convient tout à fait : il n'y a pas unicité d'une telle matrice P !

Vérification

Pour $n = 1$, on doit retrouver la matrice A

Corrigé de l'exercice 12

1. On sait que $N^p = 0$, de plus, comme I_n et N commutent, on a

$$I_n^p - N^p = (I_n - N) \left(\sum_{k=0}^{p-1} I_n^k N^{p-1-k} \right)$$

D'où

$$I_n = (I_n - N) \left(\sum_{k=0}^{p-1} N^{p-1-k} \right)$$

On en déduit que $A = I_n - N$ est inversible, d'inverse $A^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} N^{p-1-k}$

2. On sait que $N = I_n - A$, d'où $A^{-1}N = A^{-1} - I_n$.

De plus

$$A^{-1}N = \sum_{k=0}^{p-1} N^{p-k} = NA^{-1}$$

Comme N et A^{-1} commutent, on a

$$(I_n - A^{-1})^p = (-NA^{-1})^p = (-1)^p N^p (A^{-1})^p = 0$$

Ainsi $I_n - A^{-1}$ est bien nilpotente.

Attention

Deux matrices semblables ont même rang et même trace, mais si elles ont même rang et même trace, cela ne suffit pas à garantir qu'elles sont semblables !

Précision

Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2) , alors, par la formule de changement de base, on a $B = P^{-1}AP$.

Corrigé de l'exercice 13

1. A et B n'ont pas même trace, donc ne peuvent être semblables.
2. A et B ont même trace (2) et même rang (2).

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A . Posons alors $e_1 = (-1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. La famille (e_1, e_2) est libre (car formée de deux éléments non colinéaires) et donc est une base de $\mathbb{R}^2$.

On a $f(e_1) = f(-1, 0) = -f(1, 0) = -(1, 0) = e_1$. Et $f(e_2) = f(0, 1) = (1, 1) = -e_1 + e_2$. Donc la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est B .

Par conséquent, A et B représentent toutes deux f dans deux bases différentes : elles sont semblables.

3. A et B ont même rang, mais n'ont pas la même trace : elles ne sont donc pas semblables.
4. A et B ont même trace et même rang. Toutefois, $A = 2I_3$, et donc la seule matrice semblable à A est A . On en déduit que A et B ne sont pas semblables.

Corrigé de l'exercice 14

1. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(M + \lambda N) &= \text{Tr}(M + \lambda N)I_n + (M + \lambda N) \\ &= \text{Tr}(M)I_n + \lambda \text{Tr}(N)I_n + M + \lambda N \\ &= \varphi(M) + \lambda \varphi(N)\end{aligned}$$

φ est donc linéaire. De plus pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a bien $\varphi(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Ainsi φ est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit $M \in \text{Ker}(\varphi)$, on a $M = -\text{Tr}(M)I_n$, ainsi $M \in \text{Vect}(I_n)$.

Réciproquement soit $M \in \text{Vect}(I_n)$, il existe alors λ tel que $M = \lambda I_n$.

On a

$$\varphi(M) = \lambda \varphi(I_n) = \lambda(nI_n + I_n) = \lambda(n+1)I_n \neq 0_n$$

Finalement $\text{Ker}(\varphi) = \{0_n\}$.

φ est ainsi un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie, il est donc bijectif, d'où $\text{Im}(\varphi) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\begin{aligned}\varphi^2(M) &= \varphi(\text{Tr}(M)I_n + M) \\ &= \text{Tr}(M)\varphi(I_n) + \varphi(M) \\ &= (n+1)\text{Tr}(M)I_n + \varphi(M) \\ &= (n+1)(\varphi(M) - M) + \varphi(M) \\ &= (n+2)\varphi(M) - (n+1)M\end{aligned}$$

On a donc bien $\varphi^2 - (n+2)\varphi + (n+1)\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = 0$

On a ainsi $\varphi \circ (\varphi - (n+2)\text{Id}) = -(n+1)\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

D'où $\varphi \circ \left(\frac{(n+2)\text{Id} - \varphi}{n+1} \right) = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

Puis, en composant par φ^{-1} à gauche,

$$\varphi^{-1} = \frac{(n+2)\text{Id} - \varphi}{n+1}$$

Corrigé de l'exercice 15

D'après le cours, Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle car $\text{Tr}(I_n) = n$ et $F = \text{Ker } \text{Tr}$ est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il est de dimension $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - 1 = n^2 - 1$.

De plus, $A \neq 0$, et donc $\dim \text{Vect}(A) = 1$.

Soit $M \in F \cap \text{Vect}(A)$. Puisque $M \in \text{Vect}(A)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda A$, et alors

$$\text{Tr}(M) = \lambda \text{Tr}(A).$$

Mais d'autre part, si $M \in F$, alors $\text{Tr}(M) = 0$, donc $\lambda = 0$.

Ainsi, $F \cap \text{Vect}(A) = \{0\}$ et par conséquent, on a

$$\begin{cases} \dim F + \dim \text{Vect}(A) = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ F \cap \text{Vect}(A) = \{0\} \end{cases}$$

donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}(A)$.

Non nulle

Dire qu'une forme linéaire est non nulle, c'est dire qu'elle ne prend pas toujours la valeur 0. Ce n'est pas pareil que de dire qu'elle ne s'annule jamais !

On aurait également pu procéder par analyse-synthèse et prouver que tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme une matrice de trace nulle plus un multiple de A , mais c'est plus laborieux : si on a accès aux dimensions, mieux vaut raisonner comme nous venons de le faire.

Corrigé de l'exercice 16

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M .

Montrer que M est semblable à une matrice dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles, c'est montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $f(e_1) = 0, f(e_2) = 0, \dots, f(e_{n-1}) = 0$.

Mais f est de rang 1, et donc $\text{Ker } f$ est de dimension $n-1$.

Soit $D = \text{Vect}(e_n)$ un supplémentaire (nous savons qu'il en existe) de $\text{Ker } f$ et $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\text{Ker } f$.

Alors D et $\text{Ker } f$ sont en somme directe, de sorte que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, qui est la concaténation d'une base $\text{Ker}(f)$ et d'une base de D , est une base de $\mathbb{R}^n$.

Si on note $c_1, \dots, c_n$ les réels tels que $f(e_n) = \sum_{i=1}^n c_i e_i$, on a alors

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_{n-1}) & f(e_n) \\ 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_n \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}.$$

La matrice A possède alors bien ses $n-1$ premières colonnes nulles, et est semblable à M puisqu'elles représentent toutes deux l'endomorphisme f dans deux bases différentes. De manière plus précise, si $P \in GL_n(\mathbb{R})$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $(e_1, \dots, e_n)$, alors $A = P^{-1}MP$.

2. On a $M^2 = (PAP^{-1})^2 = PA^2P^{-1}$.

Or, $\text{Tr}(A) = c_n = \text{Tr}(M)$. De plus, on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_n c_1 \\ 0 & \dots & 0 & c_n c_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_n c_n \end{pmatrix} = c_n A = \text{Tr}(M)A.$$

Donc $M^2 = P \text{Tr}(M) A P^{-1} = \text{Tr}(M) \cdot M = M$.

Et donc $f^2 = f : f$ est un projecteur.

Rappel

Deux matrices semblables ont même trace.

Corrigé de l'exercice 17

Notons que si $\text{Tr}(M) = 0$, alors $M + M^\top = 0$, et donc M est antisymétrique.

Inversement, une matrice antisymétrique M est toujours de trace nulle, et donc on a toujours $M + M^\top = \text{Tr}(M)A$.

Donc l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ des matrices antisymétriques est toujours inclus dans l'ensemble des solutions de l'équation.

Notons que si une matrice M est solution de l'équation, alors

$$2\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M + M^\top) = 2\text{Tr}(\text{Tr}(M)A) = \text{Tr}(M)\text{Tr}(A).$$

- Si $\text{Tr}(A) \neq 2$, nécessairement $\text{Tr}(M) = 0$ et donc $M + M^\top = 0 : M$ est antisymétrique. Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ des matrices antisymétriques.

- Si $\text{Tr}(A) = 2$.

Alors, puisque $M + M^\top$ est toujours symétrique, si M est solution, alors $\text{Tr}(M)A$ est symétrique.

Si $\text{Tr}(M) \neq 0$, alors c'est que A est symétrique.

Donc si A n'est pas symétrique, il n'y a pas de solutions de trace non nulle, et donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

Enfin, dans le cas où A est symétrique et où $\text{Tr}(A) = 2$, soit M une solution de l'équation. Alors M s'écrit de manière unique $M = M_1 + M_2$, où M_1 est symétrique et M_2 est antisymétrique.

Et donc $M + M^\top = 2M_1$, de sorte que $2M_1 = \text{Tr}(M)A$, et donc $M_1 \in \text{Vect}(A)$.
Donc toute solution de l'équation est dans $\text{Vect}(A) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

Inversement, si $M = \lambda A + M_2$, avec $M_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, alors $\text{Tr}(M) = \lambda \text{Tr}(A) = 2\lambda$. Et donc

$$M + M^\top = 2\lambda A = 2\text{Tr}(M)A.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\text{Vect}(A) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

Remarque

Nous avons dit précédemment que si M est une solution de trace nulle, alors M est nécessairement antisymétrique.

Rappel

$\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Corrigé de l'exercice 18

1. Si A est inversible, en multipliant l'égalité $AX = 0$ par A^{-1} , il vient $X = A^{-1}0 = 0$.
Inversement, supposons que $AX = 0 \Rightarrow X = 0$.
Soit alors f l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A . Alors la propriété précédente s'écrit $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, autrement dit $\text{Ker } f = \{0\}$ et donc f est injectif. Mais un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est injectif si et seulement si c'est un isomorphisme. On en déduit que f est un isomorphisme, et donc que A est inversible.
2. Soit donc i_0 comme dans l'énoncé. En considérant les coefficients de la i_0 -ième ligne de l'égalité $AX = X$, il vient

$$0 = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j = 0.$$

$$\text{En particulier, } a_{i_0,i_0} x_{i_0} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0,j} x_j.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a alors

$$|x_{i_0}| |a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}| |x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}| \cdot |x_{i_0}|.$$

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ |x_j| \leq |x_{i_0}|.$$

Si $x_{i_0} \neq 0$, alors l'inégalité ainsi obtenue devient

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}|$$

ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. On en déduit que $|x_{i_0}| = 0$, ce qui implique que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq |x_j| \leq |x_{i_0}| = 0$, et donc que $X = 0$.

Nous venons donc de prouver que $AX = 0 \Rightarrow X = 0$, ce qui d'après la question précédente implique que A est inversible.

Corrigé de l'exercice 19

1. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(A^\top A) &= \sum_{i=1}^n (A^\top A)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (A^\top)_{i,k} a_{k,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2.\end{aligned}$$

2. (a) L'application φ_A est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_A(\lambda M + N) = \operatorname{Tr}(A^\top(\lambda M + N)) = \operatorname{Tr}(\lambda A^\top M + A^\top N) = \lambda \operatorname{Tr}(A^\top M) + \operatorname{Tr}(A^\top N) = \lambda \varphi_A(M) + \varphi_A(N).$$

Donc φ_A est bien une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Notons $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ l'application qui à A associe φ_A .

Il s'agit de prouver que f est linéaire. Soit donc $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}f(\lambda A + B)(M) &= \varphi(\lambda A + B)(M) = \operatorname{Tr}((\lambda A + B)^\top M) = \lambda \operatorname{Tr}(A^\top M) + \operatorname{Tr}(B^\top M) \\ &= \lambda \varphi_A(M) + \varphi_B(M) = \lambda f(A)(M) + f(B)(M).\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a donc $f(\lambda A + B) = \lambda f(A) + f(B)$.

Donc f est bien linéaire.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \operatorname{Ker} f$. Alors la forme linéaire φ_A est nulle.

Et en particulier, $\varphi_A(A) = 0$. D'après la question 1, c'est donc que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = 0$.

Or, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, et donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{i,j} = 0$.

Et donc A est la matrice nulle.

Ainsi, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, de sorte que f est injective.

Mais $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, donc f est bijective : c'est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

(c) Si $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, alors φ admet un unique antécédent A par f : il existe un unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi = \varphi_A$.

Méthode

Deux applications sont égales, si elles coïncident en tout point de leur ensemble de définition. C'est ce qui nous oblige à considérer ici $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en plus de A et B .

Corrigé de l'exercice 20

1. Soit $X \in \operatorname{Ker}(B - I_n)$, on a donc $(B - I_n)X = 0_{n,1}$, d'où $BX = X$.

Alors $ABX = AX$ et $(A + B)X = AX + BX = AX + X$, ainsi, puisque $AB = A + B$, on a $X = AX + X - AX = 0_{n,1}$.

D'où $\operatorname{Ker}(B - I_n) = \{0_{n,1}\}$, $B - I_n$ est donc bien inversible.

2. On a $A(B - I_n) = AB - A = B = B - I_n + I_n$, d'où $(A - I_n)(B - I_n) = I_n$.

On retrouve ainsi l'inversibilité de $B - I_n$ et $(B - I_n)^{-1} = A - I_n$ ainsi $(B - I_n)(A - I_n) = I_n$, ie. $BA - B - A + I_n = I_n$.

D'où $BA = A + B = AB$. A et B commutent donc bien.

Corrigé de l'exercice 21

1. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(M + \lambda N) &= \text{Tr}(M + \lambda N)A + (M + \lambda N) \\ &= \text{Tr}(M)A + \lambda \text{Tr}(N)A + M + \lambda N \\ &= \varphi(M) + \lambda \varphi(N)\end{aligned}$$

φ est donc linéaire. De plus pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a bien $\varphi(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi φ est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $M \in \text{Ker}(\varphi)$, on a $M = -\text{Tr}(M)A$, ainsi $M \in \text{Vect}(A)$.

Réciproquement soit $M \in \text{Vect}(I_n)$, il existe alors λ tel que $M = \lambda A$.

On a

$$\varphi(M) = \lambda \varphi(A) = \lambda(\text{Tr}(A)A + A) = \lambda(\text{Tr}(A) + 1)A$$

- Si $\text{Tr}(A) \neq -1$ alors $\varphi(M) \neq 0$ et donc $\text{Ker}(\varphi) = \{0_n\}$.
- Si $\text{Tr}(A) = -1$ alors $\varphi(M) = 0$ et donc $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(A)$

φ est ainsi un endomorphisme d'un espace de dimension finie, il est bijectif si et seulement si il est injectif donc si et seulement $\text{Tr}(A) = -1$.

3. Lorsque $\text{Tr}(A) = -1$ on a $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(A)$, ainsi $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 1$.

Le théorème du rang nous assure alors que $\text{Rang}(\varphi) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - 1 = n^2 - 1$

4. On se place dans le cas $n = 2$, notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x + (x+t)a & y + (x+t)b \\ z + (x+t)c & t + (x+t)d \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Alors $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\varphi)$ si et seulement si

$$\begin{cases} (a+1)x + at &= 0 \\ bx + y + bt &= 0 \\ cx + z + ct &= 0 \\ dx + (d+1)t &= 0 \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} (a+1)x + at &= 0 \\ bx + y + bt &= 0 \\ cx + z + ct &= 0 \\ dx + (d+1)t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)x + at &= 0 \\ y &= -b(x+t) \\ z &= -c(x+t) \\ (a+d+1)x + (a+d+1)t &= 0 \end{cases}$$

Si $(a+d+1) = 0$ alors on obtient un système homogène de 3 équations à 4 inconnues, il admet donc des solutions non triviales. Ainsi $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0_2\}$, φ n'est donc pas bijective.

Si $(a+d+1) \neq 0$ alors en continuant les calculs on obtient $a = b = c = d = 0$, ainsi $\text{Ker}(\varphi) = \{0_2\}$, φ est donc bijective.

Corrigé de l'exercice 22

1. Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A = 2I_3 + N$. De plus $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_3$.

Puisque $2I_3$ et N commutent alors, d'après la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= (2I_3 + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} N^k \\ &= \binom{n}{0} 2^n I_3 + \binom{n}{1} 2^{n-1} N + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2 \\ &= 2^n I_3 + n 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2 \\ &= 2^{n-3} (8I_3 + 4nN + n(n-1)N^2) \\ &= 2^{n-3} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4n & 8 & 0 \\ n(n-1) & 8n & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

Initialisation :

Pour $n = 0$ en posant $P_0 = X^2$ on a bien $f^{(0)}(x) = P_0(x)e^{2x}$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose qu'il existe P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{2x}$.

Alors, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f^{(n+1)}(x) = (P'_n(x) + 2P_n(x))e^{2x}$$

Il suffit donc de poser $P_{n+1} = P'_n + 2P_n$, P_{n+1} est bien un polynôme et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)e^{2x}$$

Ceci prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

On remarque de plus que $\deg(P_{n+1}) \leq \max(\deg(P'_n), \deg(P_n)) \leq \deg(P_n)$. Puisque $\deg(P_0) = 2$ on peut montrer aisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) \leq 2$.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suite réelles telles que $P_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$

Alors

$$P_{n+1} = P'_n + 2P_n = 2a_n X + b_n + 2a_n X^2 + 2b_n X + 2c_n = 2a_n X^2 + (2a_n + 2b_n)X + (b_n + 2c_n)$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n \\ b_{n+1} &= 2a_n + 2b_n \\ c_{n+1} &= b_n + 2c_n \end{cases}$$

Notons $X_n = \begin{pmatrix} c_n \\ b_n \\ a_n \end{pmatrix}$, on a alors

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 2c_n + b_n \\ 2b_n + 2a_n \\ 2a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ b_n \\ a_n \end{pmatrix} = A^\top X_n$$

Ainsi, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = (A^\top)^n X_0 = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 8 & 4n & n(n-1) \\ 0 & 8 & 8n \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^{n-3} \begin{pmatrix} n(n-1) \\ 8n \\ 8 \end{pmatrix}$$

Et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = 2^{n-3} (8X^2 + 8nX + n(n-1)) = 2^n X^2 + 2^n nX + n(n-1)2^{n-3}$$

Corrigé de l'exercice 23

1. On a

$$J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$$

Un récurrence aisée nous donne alors

$$\forall n \geq 1, \quad J^n = J$$

Supposons par l'absurde que J soit inversible, alors en multipliant la relation $J^2 = J$ par J^{-1} on obtient $J = I_3$ ce qui est absurde, J n'est donc pas inversible.

2. On a $E = \text{Vect}(I_3, J)$, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donc un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

La famille (I_3, J) est une famille génératrice de E , elle est formée de deux vecteurs non-colinéaires, c'est donc une famille libre.

Ainsi (I_3, J) est une base de E et donc $\dim(E) = 2$.

E est stable par produit si, pour tout couple $(A, B) \in E^2$ on a $AB \in E$.

Soit $A = \lambda I_3 + \mu J \in E$ et $B = \alpha I_3 + \beta J \in E$, alors

$$AB = \alpha\lambda I_3 + (\alpha\mu + \beta\lambda)J + \mu\beta J^2 = \alpha\lambda I_3 + (\alpha\mu + \beta\lambda + \mu\beta)J \in E$$

Ainsi E est stable par produit.

3. Soit $A = \lambda I_3 + \mu J \in E$ et $B = \alpha I_3 + \beta J \in E$, alors $AB = I_3$ si et seulement si $(\alpha\lambda - 1)I_3 + (\alpha\mu + \beta\lambda + \mu\beta)J = 0$.

Or (I_3, J) est libre, ainsi $(\alpha\lambda - 1)I_3 + (\alpha\mu + \beta\lambda + \mu\beta)J = 0$ si et seulement si $\begin{cases} \alpha\lambda - 1 = 0 \\ \alpha\mu + \beta\lambda + \mu\beta = 0 \end{cases}$

Si $\alpha = 0$ ou $\lambda = 0$ alors $\alpha\lambda \neq 1$, ainsi

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha\lambda - 1 = 0 \\ \alpha\mu + \beta\lambda + \mu\beta = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{\alpha} \\ \alpha\mu + \frac{\beta}{\alpha} + \mu\beta = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{\alpha} \\ \mu(\alpha + \beta) = -\frac{\beta}{\alpha} \end{cases} \end{aligned}$$

Alors

- Si $\alpha = 0$ alors A n'est pas inversible
- Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha + \beta = 0$ alors $\beta = -\alpha \neq 0$ et donc A n'est pas inversible (le système n'a pas de solutions).
- Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$ alors A est inversible d'inverse $\frac{1}{\alpha} I_3 - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)} J \in E$.

4. Soit $X \in E$, il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X = aI_3 + bJ$. Alors $X^2 = a^2 I_3 + (2ab + b^2)J$

Remarque

Le résultat est un peu étrange, il aurait probablement été plus naturel d'étudier

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ au-

quel cas on aurait eu $Y_{n+1} = BY_n$.

Ainsi $X^2 = X$ si et seulement si $(a^2 - a)I_3 + (2ab + b^2 - b)J = 0_3$. Par liberté de la famille (I_3, J) ceci est équivalent à
$$\begin{cases} a^2 - a &= 0 \\ 2ab + b^2 - b &= 0 \end{cases}.$$

On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 - a &= 0 \\ 2ab + b^2 - b &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a &\in \{0, 1\} \\ 2ab + b^2 - b &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ b^2 - b &= 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a &= 1 \\ b^2 &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ b &\in \{0, 1\} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, dans E on a $X^2 = X$ si et seulement si $X \in \{0_3, I_3, J\}$

Corrigé de l'exercice 24

1. On a

$$\begin{aligned} \text{Rang}(C) &= \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix} \right) \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \\ &= \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{10}{3}L_2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. On a $BC = 0_3$ si et seulement si $\text{Im}(C) \subset \text{Ker}(B)$.

Or

$$\text{Im}(C) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{car} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notons $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ alors $BC = 0_3$ si et seulement si (a, b, c) , (d, e, f) et (g, h, i) sont

$$\text{solutions du système linéaire} \begin{cases} x - 2y - 5z &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{cases}$$

Or

$$\begin{cases} x - 2y - 5z &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= \frac{5}{3}x \\ y &= 2x \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} x - 2y - 5z &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}((5, 10, -3))$$

On en déduit alors que $BC = 0_3$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $B = \begin{pmatrix} 5\alpha & 10\alpha & -3\alpha \\ 5\beta & 10\beta & -3\beta \\ 5\gamma & 10\gamma & -3\gamma \end{pmatrix}$ C'est-à-dire si et seulement si

$$B \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 5 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & -3 \end{pmatrix} \right)$$